铜陵电大

试卷代号:1076　　　　　　　　　　　　　　　　座位号□□

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

常微分方程　试题

2009年1月

题　号	一	二	三	四	五	总　分
分　数						

得　分	评卷人

一、填空题(每小题3分,本题共15分)

得分□ 1. 初值问题$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$的解所满足的积分方程是________________.

得分□ 2. 方程$\dfrac{dy}{dx}=x^2+\cos y$满足解的存在惟一性定理条件的区域是__________.

得分□ 3. $f'_y(x,y)$有界是保证方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$初值解惟一的_______条件.

得分□ 4. 二阶方程$y''+xy'+x^2y=0$的等价方程组是________________.

得分□ 5. 向量函数组在区间I上的朗斯基行列式$W(x)=0$是它们线性相关的_______条件.

得　分	评卷人

二、单项选择题(每小题3分,本题共15分)

得分□ 6. 方程$\dfrac{dy}{dx}=x^2\cos y$的所有常数解是(　　).

A. $y=0$　　　　B. $y=\dfrac{\pi}{2}$

C. $y=\dfrac{3\pi}{2}$　　　　D. $y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

铜陵电大

得分	

7. 方程$\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}$过点(0,0)的积分曲线(　　).

A. 有惟一一条

B. 有无穷多条

C. 只有二条

D. 不存在

得分	

8. 方程 $y''+x^2y'+xy=x^2e^x$ 的任一解的最大存在区间一定是(　　).

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,+\infty)$

C. $[0,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

得分	

9. 若 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$是二阶线性齐次微分方程的两个线性无关解,则它们(　　)共同零点.

A. 在 $x=-1$ 处可以有

B. 在 $x=0$ 处可以有

C. 不能有

D. 在 $x=1$ 处可以有

得分	

10. 方程组$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-y\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$的奇点(0,0)的类型是(　　).

A. 中心　　B. 焦点

C. 鞍点　　D. 结点

得　分	评卷人

三、计算题(每小题 8 分,本题共 40 分)

求下列方程的通解或通积分:

得分	

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+\sin x}{e^y}$

得分	

12. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$

得分	

13. $(e^x-\frac{y}{x^2})dx+\frac{1}{x}dy=0$

得分	

14. $y=xy'+y'^2$

得分	

15. $y''+(y')^2+1=0$

铜陵电大

得　分	评卷人

四、计算题(本题共 15 分)

得分	

16. 求下列方程组的通解.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y\\[2ex]\dfrac{dy}{dt}=4x+y\end{cases}$$

得　分	评卷人

五、证明题(本题共 15 分)

得分	

17. 试证明:对任意 x_0 及满足条件 $0<y_0<1$ 的 y_0,方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$ 的满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在.

铜陵电大

试卷代号：1076

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

常微分方程　试题答案及评分标准

（供参考）

2009年1月

一、填空题(每小题3分，本题共15分)

1. $y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\mathrm{d}s$，或 $y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,y)\mathrm{d}s$.

2. 全平面

3. 充分

4. $\begin{cases} y'=y_1 \\ y_1'=-xy_1-x^2y \end{cases}$

5. 必要

二、单项选择题(每小题3分，本题共15分)

6. D　　7. B　　8. B　　9. C　　10. A

三、计算题(每小题8分，本题共40分)

11. 解　分离变量积分，得

$\int e^y \mathrm{d}y=\int (x+\sin x)\mathrm{d}x+C$　　(4分)

$e^y=\frac{1}{2}x^2-\cos x+C$　　(8分)

12. 解　齐次方程的通解为

$y=\frac{C}{x}$　　(4分)

设原方程的通解为

$y=\frac{C(x)}{x}$

代入原方程，得　$C(x)=\frac{x^4}{4}+C$

所以，原方程的通解为

$y=\frac{1}{x}(C+\frac{1}{4}x^4)$ (8 分)

13. 解 $\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{x^2}=\frac{\partial N}{\partial x}$

原方程是全微分方程. (3 分)

取$(x_0,y_0)=(1,0)$，原方程的通积分为

$\int_1^x(e^x-\frac{y}{x^2})dx+\int_0^y dy=C$ (6 分)

即 $e^x+\frac{y}{x}=C$ (8 分)

14. 解 克莱洛方程，通解为

$y=Cx+C^2$ (8 分)

15. 解 令 $y'=z, y''=z'$代入方程，得

$\frac{dz}{dx}=-(1+z^2)$

分离变量，积分

$\int\frac{dz}{1+z^2}=-\int dx+C$ (3 分)

$z=\tan(-x+C)$

于是

$\frac{dy}{dx}=\tan(-x+C)$ (5 分)

积分，得通解为

$y=\ln|\cos(-x+C)|+C_1$ (8 分)

四、计算题(本题共 15 分)

16. 解 特征方程为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 4 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

特征根 $\lambda_1=3, \lambda_2=-1$ (5 分)

$\lambda_1=3$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-1$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ (10 分)

原方程组的通解为

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}e^{3t}\\2e^{3t}\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}e^{-t}\\-2e^{-t}\end{pmatrix}$$ (15 分)

五、证明题(本题共 15 分)

17. 证明 由于 $f(x,y)=\dfrac{y(y-1)}{1+x^2+y^2}$

$$f'_y(x,y)=\frac{(2y-1)(1+x^2+y^2)-y(y-1)2y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

在全平面上连续，所以原方程在全平面上满足解的存在惟一性定理及解的延展定理条件.

(7 分)

又显然 $y=0$，$y=1$ 是方程的两个特解. (10 分)

现任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，$y_0\in(0,1)$，记 $y=y(x)$ 为过 (x_0,y_0) 的解，那么这个解可以惟一地向平面的边界无限延展，又上不能穿越 $y=1$，下不能穿越 $y=0$，因此它的存在区间必为 $(-\infty,+\infty)$.

(15 分)