铜陵电大

试卷代号：1077　　　　　　　　　　　　　　**座位号**□□

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

初等数论　试题

2009年1月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(每题3分，共18分)

1. 如果 $b|a, a|b$，则(　　).

A. $a=b$　　　　B. $a=-b$

C. $a\geqslant b$　　　　D. $a=\pm b$

2. 如果 $2|n; 11|n$，则 22(　　)n.

A. 整除　　　　B. 不整除

C. 等于　　　　D. 不一定

3. 大于10且小于30的素数有(　　).

A. 4个　　　　B. 5个

C. 6个　　　　D. 7个

4. 模7的最小非负完全剩余系是(　　).

A. $-3,-2,-1,0,1,2,3$　　　　B. $-6,-5,-4,-3,-2,-1$

C. $1,2,3,4,5,6$　　　　D. $0,1,2,3,4,5,6$

5. 如果(　　)，则不定方程 $ax+by=c$ 有解.

A. $(a,b)|c$　　　　B. $c|(a,b)$

C. $a|c$　　　　D. $(a,b)|a$

6. 同余式 $x^2\equiv 438 \pmod{593}$(　　).

A. 有解　　　　B. 无解

C. 无法确定　　　　D. 有无限个解

铜陵电大

得　分	评卷人

二、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 有理数$\frac{a}{b}$,$0<a<b$,$(a,b)=1$,能写成循环小数的条件是________.

2. 同余式 $12x+15\equiv 0(\mathrm{mod}45)$有解,而且解的个数为______.

3. 不大于 545 而为 13 的倍数的正整数的个数为______.

4. 设 n 是一正整数,Euler 函数 $\varphi(n)$表示所有____________ n,而且与 n ________的正整数的个数.

5. 设 a,b 整数,则(a,b)________$=ab$.

6. 一个整数能被 3 整除的充分必要条件是它的____________数码的和能被 3 整除.

得　分	评卷人

三、计算题(每题 10 分,共 40 分)

1. 求$[513,135,3114]=?$

2. 求解不定方程 $9x+21y=6$.

3. 求$\left(\frac{429}{563}\right)$,其中 563 是素数.

4. 解同余式 $x^2\equiv 2(\mathrm{mod}23)$.

得　分	评卷人

四、证明题(每题 12 分,共 24 分)

1. 任意一个 n 位数 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$ 与其按逆字码排列得到的数 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 的差必是 9 的倍数.

2. 证明当 n 是奇数时,有 $3|(2^n+1)$.

铜陵电大

试卷代号:1077

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

初等数论　试题答案及评分标准

（供参考）

2009年1月

一、单项选择题(每题3分,共18分)

1. D　　2. A　　3. C　　4. D　　5. A　　6. B

二、填空题(每题3分,共18分)

1. $(b,10)=1$

2. 3

3. 41

4. 不大于　　互素

5. $[a,b]$

6. 十进位

三、计算题(每题10分,共40分)

1. 解:因为

$[513,135]=\frac{513\times135}{27}=2565$ ……………………………………………… (4分)

所以

$[2565,3114]=\frac{2565\times3114}{9}=887490$ ……………………………………… (4分)

所以$[513,135,3114]=887490$. ……………………………………………………… (2分)

2. 解:因为$(9,21)=3|6$,所以有解. 化简 $3x+7y=2$. ……………………………… 4分

简单计算 $x=-4,y=2$ 是一组特解,…………………………………………………… 3分

所以不定方程的解为 $x=-4+7t,y=2-3t$. ……………………………………… 3分

3. 解:把$\left(\frac{429}{563}\right)$看成Jacobi符号,我们有

$\left(\frac{429}{563}\right)=(-1)^{\frac{429-1}{2}\cdot\frac{563-1}{2}}\left(\frac{563}{429}\right)$ ……………………………………… (3分)

$=\left(\frac{563}{429}\right)=\left(\frac{134}{429}\right)=\left(\frac{2}{429}\right)\left(\frac{67}{429}\right)=(-1)^{\frac{429^2-1}{8}}\left(\frac{67}{429}\right)$

$$=-\left(\frac{67}{429}\right)=-(-1)^{\frac{67-1}{2}\cdot\frac{429-1}{2}}\left(\frac{429}{67}\right)=-\left(\frac{429}{67}\right)$$ …………………………… (3 分)

$$=-\left(\frac{27}{67}\right)=-(-1)^{\frac{27-1}{2}\cdot\frac{67-1}{2}}\left(\frac{67}{27}\right)=\left(\frac{67}{27}\right)$$

$$=\left(\frac{13}{27}\right)=(-1)^{\frac{27-1}{2}\cdot\frac{13-1}{2}}\left(\frac{27}{13}\right)=\left(\frac{1}{13}\right)=1,$$ …………………………………… (3 分)

即 429 是 563 的平方剩余. ……………………………………………………………… (1 分)

4. 解：因为 $2^{\frac{23-1}{2}}=2^{11}\equiv1\pmod{23}$，所以有解，而且解的个数为 2. ……………………… 5 分

解分别为 $x\equiv5,18\pmod{23}$. ……………………………………………………………… 5 分

四、证明题(每题 12 分，共 24 分)

1. 证明　因为 $a_na_{n-1}\cdots a_2a_1=a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2\times10+a_1$，

$a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=a_1\times10^{n-1}+a_2\times10^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\times10+a_n$， ……………………… (5 分)

所以，$a_na_{n-1}\cdots a_2a_1-a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n=$

$a_n\times(10^{n-1}-1)+a_{n-1}\times10(10^{n-3}-1)+\cdots+a_2\times10(1-10^{n-3})+a_1(1-10^{n-1})$. …(4 分)

而上面等式右边的每一项均是 9 的倍数，……………………………………………………… (2 分)

于是所证明的结论成立. ……………………………………………………………………… (1 分)

2. 证明　因为 $2\equiv-1\pmod{3}$，所以

$2^n+1\equiv(-1)^n+1\pmod{3}$. ……………………………………………………………… (6 分)

于是，当 n 是奇数时，我们可以令 $n=2k+1$.

从而有 $2^n+1\equiv(-1)^{2k+1}+1\equiv0\pmod{3}$， ……………………………………………… (4 分)

即 $3\mid(2^n+1)$. ……………………………………………………………………………… (2 分)