铜陵电大

试卷代号:1078　　　　　　　　　　座位号

中央广播电视大学 2008—2009 学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

复变函数　试题

2009 年 1 月

题　号	一	二	三	四	总　分
分　数					

得　分	评卷人

一、单项选择题(本题共 20 分,每小题 4 分)

得分	

1. 若 $z=x+iy$,则 $z\cdot\bar{z}$(　　).

A. $x-iy$　　　　B. x^2-y^2

C. x^2+y^2　　　　D. $x+iy$

得分	

2. $e^{2-\frac{\pi}{2}i}=$(　　).

A. $-e^2$　　　　B. ie^2

C. $-ie^2$　　　　D. e^2

得分	

3. $\int_{|z|=9} e^z dz=$(　　).

A. -1　　　　B. 1

C. 0　　　　D. i

得分	

4. 函数 $f(z)=\frac{1}{3+z}$在点 $z=1$ 展成幂级数的收敛半径为(　　).

A. 1　　　　B. 2

C. 3　　　　D. 4

得分	

5. 点 $z=0$ 为函数 $f(z)=z^{-1}\cdot\sin z$ 的(　　).

A. 解析点　　　　B. 可去奇点

C. 极点　　　　D. 本性奇点

铜陵电大

得　分	评卷人

二、填空题(本题共 20 分,每小题 4 分)

得分	

6. 若点集 E 的全部聚点都属于 E,则称 E 为____________集.

得分	

7. 若函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均在区域 G 内解析,则 $[f(z)\cdot g(z)]'=$__________________________.

得分	

8. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ 在点 $z=1$ 展成罗朗级数,即在____________________内展成罗朗级数.

得分	

9. 函数的孤立奇点的种类有极点、可去奇点与____________________.

得分	

10. 映射 $w=z+6$ 将圆周映射为____________.

得　分	评卷人

三、计算题(本题共 45 分,每小题 15 分)

得分	

11. 试求解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$,使得 $u=x^2-y^2+xy$,且有 $f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$.

得分	

12. 计算积分 $\int_c \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^2(z-1)}\mathrm{d}z, c: |z|=2$.

得分	

13. 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$ 在点 $z=0$ 的邻域内展成幂级数.

得　分	评卷人

四、证明题(本题 15 分)

得分	

14. 试证:若 $|a|=1$,则 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=1$.

铜陵电大

试卷代号:1078

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

复变函数 试题答案及评分标准

(供参考)

2009年1月

一、单项选择题(本题共20分,每小题4分)

1. B　　2. C　　3. C　　4. D　　5. B

二、填空题(本题共20分,每小题4分)

6. 闭

7. $f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$

8. $0<|z-1|<+\infty$

9. 本性奇点

10. 圆周

三、计算题(本题共45分,每小题15分)

11. 解:由C—R条件有 $u_x=2x+y=v_y$,所以

$$v=2xy+\frac{y^2}{2}+\varphi(x)$$

又因为 $u_y=-v_x$,所以 $\varphi(x)=-\frac{x^2}{2}+c$,由此得

$$f(z)=x^2-y^2+xy+\mathrm{i}(2xy+\frac{y^2-x^2}{2}+c)$$

由 $f(\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$ 得 $c=\frac{1}{2}$ …………………………………………………… 12分

因此

$$f(z)=x^2-y^2+xy+\mathrm{i}(2xy+\frac{y^2-x^2}{2}+\frac{1}{2})$$

或

$$f(z)=(1-\frac{\mathrm{i}}{2})z^2+\frac{\mathrm{i}}{2}$$

即为所求. …………………………………………………………………… 15分

12. 解法 1：设 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z-1)}$，因 $f(z)$ 在 c 的内部只有两个有限奇点 0 与 1，故作

$c_1:|z|=\dfrac{1}{2}$，$c_2:|z-1|=\dfrac{1}{2}$，由定理 4.4 有

$$\int_c \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=\int_{c_1}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz+\int_{c_2}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$$

而

$$\int_{c_1}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=\int_{c_1}\frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^2}dz=2\pi i\left(\frac{e^z}{z-1}\right)'\bigg|_{z=0}$$

$$=-4\pi i$$

$$\int_{c_2}\frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=\int_{c_2}\frac{\frac{e^z}{z^2}}{z-1}dz=2\pi i\left(\frac{e^z}{z^2}\right)\bigg|_{z=1}$$

$$=2\pi e i$$

故

$$\int_c \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=-4\pi i+2\pi e i=2\pi i(e-2)$$ …………………………………………… 15 分

解法 2：设 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2(z-1)}$，因 $f(z)$ 在 c 的内部只有两个极点 0 与 1，且知 0 是 $f(z)$ 的二级极点，1 是 $f(z)$ 的一级极点，由定理 7.1 得

$$\int_c \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=2\pi i[\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,1)]$$

而

$$\mathrm{Res}(f,0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left[z^2\cdot\frac{e^z}{z^2(z-1)}\right]'=-2$$

$$\mathrm{Res}(f,1)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{e^z}{z^2(z-1)}=e$$

故

$$\int_c \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz=2\pi i(e-2)$$ …………………………………………………………… 15 分

13. 解：$f(z)\frac{1}{z^2+z-2}=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+2})=\frac{1}{3}[\frac{-1}{1-z}-\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}]$$

$$=\frac{1}{3}[-\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n z^n]$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}]z^n$$ …………………………………………………… 12 分

$|z|<1$ …………………………………………………………………………………… 15 分

四、证明题(本题 15 分)

14. 证法 1：因$|\bar{a}|=|a|=1$，所以有

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=\left|\frac{\bar{a}(a-b)}{1-\bar{a}b}\right|=\left|\frac{1-\bar{a}b}{1-\bar{a}b}\right|=1$$

故结论得证. …………………………………………………………………………… 15 分

证法 2：因$|a|=1$，所以有 $a\cdot\bar{a}=|a|^2=1$

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|=\left|\frac{a-b}{(1-\bar{a}b)a}\right|=\left|\frac{a-b}{a-b}\right|=1$$

故结论得证. …………………………………………………………………………… 15 分