铜陵电大

试卷代号:1086

座位号□□

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

实变函数 试题

2009年1月

题 号	一	二	三	总 分
分 数				

得 分	评卷人

一、单项选择题(本题共20分,每小题4分)

得分□ 1. 任意多个开集的交一定是(　　).

A. 闭集　　B. 开集

C. 可测集　　D. 完备集

得分□ 2. 设 $E\subset R^n$,且 $mE=0$,则(　　).

A. E 是有限集

B. E 是可列集

C. E 是有界集

D. 以上都不对

得分□ 3. 设 $mE=0$,则 E 一定是(　　).

A. 至多可列集

B. 没有内点

C. 孤立点集

D. 有界集

铜陵电大

得分 4. 设 $mE<+\infty$，$\{f_n(x)\}$是 E 上几乎处处有限的可测函数列，$f(x)$是 E 上几乎处处有限的可测函数，则$\{f_n(x)\}$依测度收敛于 $f(x)$是$\{f_n(x)\}$几乎处处收敛于 $f(x)$的（ ）.

A. 充分条件　　B. 必要条件

C. 充分必要条件　　D. 无关条件

得分 5. 设 $f(x)$ 是 E 上的可积函数且$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$，则（ ）.

A. $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x=\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$

B. $\int_E \left|f(x)\right|\mathrm{d}x=0$

C. $f(x)$在 E 上几乎处处等于零

D. $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x=-\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$

得　分	评卷人

二、填空题（本题共 20 分，每小题 4 分）

得分 6. 设 $A_n=[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$ （$n=1,2,\cdots$），则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$________________.

得分 7. 直线上任何非空开集都可表示为________________个互不相交的开区间的并.

得分 8. 设 E 是R^n 中的点集，如果对任意集合 T，都有 $m^*E=$____，则称 E 是勒贝格可测集.

得分 9. 设 $f(x)=\begin{cases}x, x\in P_0\\ e^x, x\in[0,1]\setminus P_0\end{cases}$，其中 P_0 是康托集，则$\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x=$__________.

得分 10. 设 $f(x)$是 E 上的勒贝格可积函数，则 $f(x)$在 E 上________________有限.

铜陵电大

得　分	评卷人

三、证明题(本题共 60 分,每小题 15 分)

得分	

11. 设 $f(x)$ 是 R^1 上的实值函数,对任意实数 a,证明:

$$\{x \mid x \in R^1, f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid x \in R^1, f(x) < a + \frac{1}{n}\}.$$

得分	

12. 设 $M \subset R^n$,试证 $\overline{M} = \{x \mid d(x, M) = 0\}$.

得分	

13. 设 $mE < +\infty$,$\{f_n(x)\}$ 及 $f(x)$ 分别是 E 上几乎处处有限的可测函数列及可测函数,如果对任意 $\delta > 0$,存在 E 的子集 E_δ,使 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$ 且 $\{f_n(x)\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$,证明:$\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

得分	

14. 设 $f(x)$ 是 E 上的勒贝格可积函数,$e_n = E[x \mid |f(x)| \geqslant n]$,$n = 1, 2, \cdots$,证明:$\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot me_n = 0$.

铜陵电大

试卷代号:1086

中央广播电视大学2008—2009学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

实变函数　试题答案及评分标准

(供参考)

2009年1月

一、单项选择题(本题共20分,每小题4分)

1. C　　2. D　　3. B　　4. B　　5. A

二、填空题(本题共20分,每小题4分)

6. $\{0\}$

7. 至多可列

8. $m^*(T\cap E)+m^*(T\cap \complement E)$

9. e−1

10. 几乎处处

三、计算题与证明题(本题共60分,每小题15分)

11. 证:设 $x_0\in\{x\mid x\in R^1, f(x)\leqslant a\}$,则 $f(x_0)\leqslant a$. 于是对任意正整数 n,有 $f(x_0)<a+\frac{1}{n}$,即

$$x_0\in\{x\mid x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}\}, n=1,2,\cdots$$

因此,$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\mid x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}\}$. 故

$$\{x\mid x\in R^1, f(x)\leqslant a\}\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\mid x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}\}$$ ……………… 8分

再设 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\mid x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}$,则对任意的 n,有

$$x_0\in\{x\mid x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}\}$$

即

$$f(x_0)<a+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$$

令　$n\to\infty$,得 $f(x_0)\leqslant a$. 因此

$$\{x\mid x\in R^1, f(x)\leqslant a\}\supset\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x\mid x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}\}$$

铜陵电大

综上证得

$$\{x|x\in R^1, f(x)\leqslant a\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|x\in R^1, f(x)<a+\frac{1}{n}\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 15\text{分}$$

12. 证：设 $x_0\in\overline{M}$，则 $x_0\in M$ 或 $x_0\in M'$。若 $x_0\in M$，则 $d(x_0,M)=0$，所以 $x_0\in\{x|d(x,M)=0\}$。若 $x_0\in M'$，由定理 2.1.2，存在互异点列 $\{x_n\}\subset M$，使 $d(x_0,x_n)\to 0$。因此

$$0\leqslant d(x_0,M)\leqslant d(x_0,x_n)\to 0$$

由此得 $d(x_0,M)=0$。所以 $x_0\in\{x|d(x,M)=0\}$。以上证得

$$\overline{M}\subset\{x|d(x,M)=0\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 7\text{分}$$

若 $x_0\overline{\in}\overline{M}$，则 $x_0\overline{\in}M$ 且 $x_0\overline{\in}M'$。于是由定理 2.1.1，存在 $N(x_0,\delta)$，使 $N(x_0,\delta)\cap M=\varnothing$，由此得 $d(x_0,M)\geqslant\delta>0$。因此，$x_0\overline{\in}\{x|d(x,M)=0\}$。从而证得 $\overline{M}\supset\{x|d(x,M)=0\}$。

综上证得 $\overline{M}=\{x|d(x,M)=0\}$。 ………………………… 15 分

13. 证：对任意正整数 k，由题设知，存在子集 $E_k\subset E$，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 E_k 上一致收敛于 $f(x)$，且 $m(E\setminus E_k)<\frac{1}{k}$。从而在 $\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ 上有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 8\text{分}$$

又因 $E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\subset E\setminus E_k$，$k=1,2,\cdots$，故有

$$m(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)\leqslant m(E\setminus E_k)<\frac{1}{k}\to 0(k\to\infty)$$

所以 $m(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)=0$。因此 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $a.e.$ 于 E。 ………………………… 15 分

14. 证：首先证明 $\lim_{n\to\infty}me_n=0$。事实上，因 $f(x)$ 可积，所以 $|f(x)|$ 也可积，于是

$$\int_E|f(x)|\,dx\geqslant\int_{e_n}|f(x)|\,dx\geqslant n\cdot me_n\qquad(*)$$

因此，

$$me_n\leqslant\frac{1}{n}\int_E|f(x)|\,dx\to 0(n\to\infty)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ 8\text{分}$$

由 $|f(x)|$ 积分的绝对连续性，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $e\subset E$ 且 $me<\delta$ 时，恒有 $\int_e|f(x)|\,dx<\varepsilon$。

对上述 $\delta>0$，因 $me_n\to 0$，所以存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $me_n<\delta$。于是

$$\int_{e_n}|f(x)|\,dx<\varepsilon,\text{当 } n\geqslant N \text{ 时}$$

再由$(*)$式，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$n\cdot me_n\leqslant\int_{e_n}|f(x)|\,dx<\varepsilon$$

此即 $\lim_{n\to\infty}n\cdot me_n=0$。 ………………………… 15 分