

# 铜陵电大

试卷代号:1087

座位号

中央广播电视大学 2008—2009 学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

## 数学分析专题研究 试题

2009 年 1 月

题号	一	二	三	四	总分
分数					

得分	评卷人

### 一、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

- 得分  1. 设  $A, B, C$  是三个集合,且  $A \subset B \cup C$ ,则有( )成立.
- A. 若  $x \in A$ ,则  $x \in B$                       B. 若  $x \in A$ ,则  $x \in C$   
C. 若  $x \in A$ ,则  $x \in B \cap C$               D. 若  $x \notin B \cup C$ ,则  $x \notin A$
- 得分  2. 设  $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ ,则  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是( ).
- A. 双射    B. 既非单射也非满射  
C. 单射而非满射                                D. 满射而非单射
- 得分  3. 下列数集( )不是可列集.
- A. 自然数集                                        B. 整数集  
C. 有理数集                                        D. 实数集
- 得分  4. 已知函数  $y = f(x)$  在  $(0, 1)$  内可导,且  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  内连续,则  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内( ).
- A. 连续    B. 间断  
C. 有界    D. 无界
- 得分  5. 有界闭凸集  $S$  上的下凸函数  $f(x)$  的最大值必在  $S$  的( )达到.
- A. 内部    B. 外部  
C. 边界  $\partial S$                                         D. 可能是内部也可能在边界  $\partial S$

# 铜陵电大

得分	评卷人

## 二、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

得分  6. 已知  $A = \{a, b\}, B = \{c, d\}$ , 则  $B \times A =$  \_\_\_\_\_

得分  7. 设  $R$  为  $X$  中的关系, 若  $R$  是反身的、对称的、传递的, 则称关系  $R$  是 \_\_\_\_\_

得分  8. 若集合  $A$  能与其任意真子集  $A_1$  之间建立一个双射, 则集合  $A$  是 \_\_\_\_\_

得分  9.  $e^x =$  \_\_\_\_\_

得分  10. 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ , 则  $f(x) = \ln(\text{_____})$ .

得分	评卷人

## 三、计算题(每小题 15 分,共 30 分)

得分  11. 已知函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) = x^2 - 4x + 3$ , 求  $f(x)$ .

得分  12. 求函数  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  的极值.

得分	评卷人

## 四、证明题(每小题 15 分,共 30 分)

得分  13. 设  $y = f(x)$  是从  $[0, 1]$  到  $[0, 1]$  的连续函数, 则存在点  $x_0 \in [0, 1]$ , 使  $f(x_0) = x_0^n$ , 其中  $n$  是一个非零自然数.

得分  14. 设  $A, B, C$  为三角形的三个内角, 求证  $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ .

# 铜陵电大

试卷代号:1087

中央广播电视大学 2008—2009 学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

## 数学分析专题研究 试题答案及评分标准

(供参考)

2009 年 1 月

### 一、单项选择题(每小题 4 分,共 20 分)

1. D                      2. B                      3. D                      4. A                      5. C

### 二、填空题(每小题 4 分,共 20 分)

6.  $\{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$

7. 等价关系

8. 无限集

9.  $\cos x + i \sin x$

10.  $1+x$

### 三、计算题(每小题 15 分,共 30 分)

11. 解  $f(x+1) = x^2 - 4x + 3$   
 $= (x+1)^2 - 6(x+1) + 8$

故  $f(x) = x^2 - 6x + 8$  15 分

12. 解 令  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$  解得  $x = \pm 1$  8 分

$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3}$ ,  $f''(1) = 2 > 0$ , 故  $x = 1$  是极小值点,  $f(1) = 2$  是极小值; 12 分

$f''(-1) = -2 < 0$ , 故  $x = -1$  是极大值点,  $f(-1) = -2$  是极大值. 15 分

### 四、证明题(每小题 15 分,共 30 分)

13. 证明:若  $f(0) = 0$  或  $f(1) = 1$ , 则  $x_0$  可取为 0 或 1.

# 铜陵电大

否则有  $f(0) > 0$  且  $f(1) < 1$ , 设  $\varphi(x) = f(x) - x^n$ ,  $\varphi(x)$  是  $[0, 1]$  上的连续函数, 且  $\varphi(0) = f(0) > 0, \varphi(1) = f(1) - 1 < 0$  10 分

由连续函数的介值定理知, 至少有一点  $x_0 \in (0, 1)$ , 使  $\varphi(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = x_0^n$  15 分

14. 证明: 已知  $\sin x$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内是上凸函数, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \left[ \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right] &\leq \sin \left[ \frac{1}{3} \frac{A}{2} + \frac{1}{3} \frac{B}{2} + \frac{1}{3} \frac{C}{2} \right] \\ &= \sin \frac{1}{6} (A + B + C) = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad 10 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \left\{ \frac{1}{3} \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \right\}^3 \leq \left( \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} \quad 15 \text{ 分}$$