

4. $\int_1^{+\infty} xe^{-x^2} dx = (\quad)$.

A. e

B. $\frac{-1}{2e}$

C. $\frac{1}{2e}$

D. $+\infty$

5. 下列级数收敛的是().

A. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10}{2^n}$

B. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

C. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

D. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^2+n} - n)$

得 分	评卷人

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq 0 \\ e^x & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 函数 $y = \frac{x+1}{x^2-2x-3}$ 的连续区间是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. 经过点(2,10),且在每一点的切线斜率都等于 $3x$ 的曲线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 定积分 $\int_{-1}^1 x \cos x dx \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 微分方程 $y'' + 4y = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

得 分	评卷人

三、计算题(每小题 9 分,共 54 分)

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 4x}$.

2. 设 $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$, 求 $y'(\frac{\pi}{3})$.
3. 已知 $y - 2x = (x - y)\ln(x - y)$, 求 $y'(x)$.
4. 计算定积分 $\int_0^{\ln 2} e^x(1 + e^x)^2 dx$.
5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} (x - 3)^n$ 的收敛半径.
6. 求微分方程 $xy' = y \ln y$ 的通解.

得 分	评卷人

四、应用题(本题 16 分)

欲做一个底为正方形, 容积为 108 立方米的长方体开口容器, 怎样做法用料最省?

试卷代号:2022

中央广播电视大学 2009—2010 学年度第二学期“开放专科”期末考试(半开卷)

高等数学(1) 试题答案及评分标准

(供参考)

2010 年 7 月

一、单项选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. D 2. B 3. A 4. C 5. A

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 2

2. $(-\infty, -1) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$

3. $y = \frac{3}{2}x^2 + 4$

4. 0

5. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

三、计算题(每小题 9 分,共 54 分)

1. 解: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sin 4x(\sqrt{1-x}+1)}$ 4 分

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 4x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$
 9 分

2. 解: 因为 $y' = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$ 3 分

$$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$
 6 分

所以 $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1+\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}$ 9 分

3. 解: 因为在方程等号两边分别对 x 求导, 得

$$y' - 2 = (1 - y') \ln(x - y) + (x - y) \frac{1 - y'}{x - y}$$
 5 分

$$[2 + \ln(x - y)]y' = 3 + \ln(x - y)$$

所以 $y' = \frac{3 + \ln(x-y)}{2 + \ln(x-y)}$ 9分

4. 解: $\int_0^{\ln 2} e^x (1+e^x)^2 dx = \int_0^{\ln 2} (1+e^x)^2 d(1+e^x)$ 4分

$$= \frac{1}{3} (1+e^x)^3 \Big|_0^{\ln 2} = \frac{19}{3}$$
 9分

5. 解: 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3}$ 6分

所以幂级数的收敛半径为 $R = 3$. 9分

6. 解: 将原方程分离变量, 即 $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{x}$, 4分

两端积分, 得方程的通解为: $\ln(\ln y) = \ln x + \ln C$

即 $\ln y = Cx$ 9分

四、应用题(本题 16 分)

解: 设底边的边长为 x , 高为 h , 用料为 y , 由已知 $x^2 h = 108$, 得 $h = \frac{108}{x^2}$.

$$y = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$$
 5分

令 $y' = 2x - \frac{432}{x^2} = 0$, 解得 $x = 6$ 是唯一驻点, 10分

且 $y'' = 2 + \frac{2 \times 432}{x^3} \Big|_{x=6} > 0$, 说明 $x = 6$ 是函数的极小值点. 13分

所以当 $x = 6, h = \frac{108}{6^2} = 3$ 时用料最省. 16分