试卷代号:1077 座位号

中央广播电视大学2009—2010学年度第一学期“开放本科”期末考试(半开卷)

初等数论 试题

2010年1月

题 号	一	二	三	四	总 分
分 数					

得 分	评卷人

一、单项选择题(每题3分,共18分)

1. $(0,b)=($ $)$.

A. b B. $-b$

C. $|b|$ D. 0

2. 如果$(a,b)=1$,则$(ab,a+b)=($ $)$.

A. a B. b

C. 1 D. $a+b$

3. 小于30的素数的个数( ).

A. 10 B. 9

C. 8 D. 7

4. 如果$a\equiv b(\bmod m)$,c是任意整数,则( ).

A. $ac\equiv bc(\bmod m)$ B. $a=b$

C. $ac\not\equiv bc(\bmod m)$ D. $a\neq b$

5. 不定方程$525x+231y=210$( ).

A. 有解 B. 无解

C. 有正数解 D. 有负数解

6. 整数5874192能被( )整除.

A. 3 B. 3与9

C. 9 D. 3或9

得　分	评卷人

二、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 素数写成两个平方数和的方法是____________.
2. 同余式 $ax+b\equiv 0(\bmod m)$ 有解的充分必要条件是____________.
3. 如果 a,b 是两个正整数,则不大于 a 而为 b 的倍数的正整数的个数为________.
4. 如果 p 是素数,a 是任意一个整数,则 a 被 p 整除或者________________.
5. a,b 的公倍数是它们最小公倍数的________.
6. 如果 a,b 是两个正整数,则存在________整数 q,r,使 $a=bq+r,0\leqslant r<b$.

得　分	评卷人

三、计算题(每题 10 分,共 40 分)

1. 求$[24871,3468]=$?
2. 求解不定方程 $6x-17y=18$.
3. 解同余式 $111x\equiv 75(\bmod 321)$.
4. 求 17 的平方剩余与平方非剩余.

得　分	评卷人

四、证明题(每题 12 分,共 24 分)

1. 证明当 n 是奇数时,有 $3\mid(2^n+1)$.
2. 如果 a,b 是两个整数,$b>0$,则存在唯一的整数对 q,r,使得 $a=bq+r$,其中 $0\leqslant r<b$.

试卷代号:1077

中央广播电视大学2009—2010学年度第一学期"开放本科"期末考试(半开卷)

初等数论　试题答案及评分标准

(供参考)

2010年1月

一、单项选择题(每题3分,共18分)

1. C　　2. C　　3. A　　4. A　　5. A　　6. B

二、填空题(每题3分,共18分)

1. 唯一的

2. $(a,m)|b$

3. $[\frac{a}{b}]$

4. 与 p 互素

5. 倍数

6. 唯一

三、计算题(每题10分,共40分)

1. 求$[24871,3468]=?$

解:因为

$(24871,3468)=17$ ……(5分)

所以

$$[24871,3468]=\frac{24871\times 3468}{17}$$

$$=5073684$$ ……(5分)

2. 求解不定方程 $6x-17y=18$.

解:因为$(6.17)|18$,所以有解; ……(2分)

考虑 $6x+17y=1$, $x=3$, $y=-1$; ……(2分)

所以 $x=54$, $y=-18$ 是特解, ……(3分)

即原方程的解是

$x=54-17t, y=-18-6t$ ……(3 分)

3. 解同余式 $111x\equiv 75 \pmod{321}$.

解：因为 $(111,321)=3|75$，所以同余式有 3 个解. ……(2 分)

将同余式化简为等价的同余方程

$37x\equiv 25 \pmod{107}$. ……(2 分)

我们再解不定方程

$37x+107y=25$， ……(1 分)

得到一解 $(-8,3)$. ……(1 分)

于是定理 4.1 中的 $x_0=-8$. ……(1 分)

因此同余式的 3 个解为

$x\equiv -8 \pmod{321}$， ……(1 分)

$x\equiv -8+\frac{321}{3} \pmod{321}\equiv 99 \pmod{321}$， ……(1 分)

$x\equiv -8+2\times\frac{321}{3} \pmod{321}\equiv 206 \pmod{321}$. ……(1 分)

4. 求 17 的平方剩余与平方非剩余.

解：因为 $\frac{17-1}{2}=8$，所以平方剩余与平方非剩余各有 8 个. ……(3 分)

又因为

$1^2\equiv 1, 2^2\equiv 4, 3^2\equiv 9, 4^2\equiv 16$，

$5^2\equiv 8, 6^2\equiv 2, 7^2\equiv 15, 8^2\equiv 13$， ……(4 分)

所以，1，2，4，8，9，13，15，16 是素数 17 的 8 个平方剩余. 其它的 8 个数 3，5，6，7，10，11，12，14 是素数 17 的平方非剩余. ……(3 分)

四、证明题(每题 12 分，共 24 分)

1. 证明当 n 是奇数时，有 $3|(2^n+1)$.

证明：因为 $2\equiv -1 \pmod 3$，所以

$2^n+1\equiv (-1)^n+1 \pmod 3$. ……(5 分)

于是，当 n 是奇数时，我们可以令 $n=2k+1$.

从而有 $2^n+1\equiv(-1)^{2k+1}+1\equiv0 \pmod 3$, ……(5 分)

即 $3|(2^n+1)$. ……(2 分)

2. 如果 a,b 是两个整数, $b>0$, 则存在唯一的整数对 q,r, 使得 $a=bq+r$, 其中 $0\leqslant r<b$.

……(11 分)

证明:首先证明唯一性. 设 q',r' 是满足条件的另外整数对, 即

$a=bq'+r',0\leqslant r'<b$.

所以 $bq'+r'=bq+r$, 即 $b(q'-q)=r-r',b|q'-q|=|r-r'|$. 又由于 $0\leqslant r<b,0\leqslant r'<b$, 所以 $|r-r'|<b$. 如果 $q\neq q'$, 则等式 $b|q'-q|=|r-r'|$ 不可能成立.

因此 $q=q',r=r'$. ……(6 分)

其次证明存在性. 我们考虑整数的有序列

$\cdots\cdots,-3b,-2b,-b,0,b,2b,3b,\cdots\cdots$

则整数 a 应介于上面有序列的某两数之间, 即存在一整数 q 使

$qb\leqslant a<(q+1)b$.

我们设 $r=a-qb$, 则有 $a=bq+r,0\leqslant r<b$. ……(6 分)