

试卷代号:11080

座位号

国家开放大学2024年秋季学期期末统一考试

工程数学(本) 试题

2025 年 1 月

注意事项:

1. 将你的学号、姓名及考点名称填写在试题和答题纸的规定栏内。考试结束后,把试题和答题纸放在桌上。试题和答题纸均不得带出考场。待监考人员收完试题和答题纸后方可离开考场。
2. 仔细阅读题目的说明,并按题目要求答题。所有答案必须写在答题纸的指定位置上,写在试题上的答案无效。
3. 用蓝、黑圆珠笔或钢笔(含签字笔)答题,使用铅笔答题无效。

一、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. 设 A, B 均为 n 阶方阵,则下列等式成立的是()。
 - A. $|AB| = |BA|$
 - B. $|A+B| = |A| + |B|$
 - C. $|AB| = n|A||B|$
 - D. $|2A| = 2|A|$
2. 方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_1 + x_3 = a_3 \end{cases}$ 相容的充分必要条件是(),其中 $a_i \neq 0, i=1,2,3$ 。
 - A. $a_1 + a_2 + a_3 = 0$
 - B. $a_1 + a_2 - a_3 = 0$
 - C. $a_1 - a_2 + a_3 = 0$
 - D. $-a_1 + a_2 + a_3 = 0$
3. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值为 0, 2, 则 $3A$ 的特征值为()。
 - A. 0, 2
 - B. 0, 0
 - C. 0, 6
 - D. 2, 6
4. 同时掷 3 枚均匀硬币,恰好有 1 枚正面向上的概率为()。
 - A. $\frac{1}{8}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{1}{4}$
 - D. $\frac{3}{8}$

5. 设 $X \sim N(1, 2^2)$, 则随机变量() $\sim N(0, 1)$ 。

- A. $\frac{X+1}{2}$
- B. $\frac{X-1}{4}$
- C. $\frac{X+1}{4}$
- D. $\frac{X-1}{2}$

二、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. 设 A 为 3×5 矩阵, B 为 4×3 矩阵,且乘积 $AC'B$ 有意义,则 C 为_____矩阵。

7. 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ 的秩为_____。

8. 若 $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5$, 且事件 A, B 相互独立,则 $P(A+B) =$ _____。

9. 设随机变量 $X \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$, 则 $P(X \neq 0) =$ _____。

10. 设随机变量 X , 若 $D(X) = 1$, 则 $D(2X-1) =$ _____。

三、计算题(本题共 4 小题,每小题 16 分,共 64 分)

11. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, 解矩阵方程 $AX = B'$ 。

12. 当 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + \lambda x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解? 在有非零解的情况下求方程组的通解。

13. 设 $X \sim N(20, 2^2)$, 试求: (1) $P(22 < X < 26)$; (2) $P(X > 24)$ 。(已知 $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(2) = 0.9772, \Phi(3) = 0.9987$).

14. 设某一批零件重量 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.6^2)$, 随机抽取 9 个测得平均重量为 5 (单位: 千克), 试求此零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间(已知 $u_{0.975} = 1.96$).

四、证明题(本题 6 分)

15. 设随机事件 A 与 B 相互独立, 试证 A 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

一、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

1. A 2. B 3. C 4. D 5. D

二、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,共 15 分)

6. 4×5
7. 1
8. 0.6
9. 0.5
10. 4

三、计算题(本题共 4 小题,每小题 16 分,共 64 分)

11. 解:因为 $[A : I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$

得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 7 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (10 分)

所以 $X = A^{-1}B' = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 7 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -18 \\ 16 & -29 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}.$ (16 分)

12. 解:将齐次线性方程组的系数矩阵化为阶梯形

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & \lambda \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & \lambda-4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-7 \end{bmatrix}$$

故当 $\lambda=7$ 时,方程组有非零解. (7 分)

方程组的一般解为 $\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ (其中 x_3 是自由未知数) (10 分)

令 $x_3=1$,方程组的一个基础解系 $X_1 = [-3 \ 1 \ 1]'$ (13 分)

于是,方程组的通解为 kX_1 (其中 k 为任意常数). (16 分)

13. 解:(1) $P(22 < X < 26) = P(\frac{22-20}{2} < \frac{X-20}{2} < \frac{26-20}{2}) = P(1 < \frac{X-20}{2} < 3)$
 $= \Phi(3) - \Phi(1) = 0.9987 - 0.8413 = 0.1574.$ (8 分)

(2) $P(X > 24) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - P(\frac{X-20}{2} \leq \frac{24-20}{2}) = 1 - P(\frac{X-20}{2} \leq 2)$
 $= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$ (16 分)

14. 解:由于已知 σ^2 ,故选取样本函数

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (5 \text{ 分})$$

零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为

$$[\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}] \quad (10 \text{ 分})$$

由已知, $\bar{x}=5, \sigma=0.6, n=9, u_{0.975}=1.96$,于是可得

$$\bar{x} - u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 - 1.96 \times \frac{0.6}{\sqrt{9}} = 4.608,$$

$$\bar{x} + u_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 + 1.96 \times \frac{0.6}{\sqrt{9}} = 5.392,$$

因此,零件重量总体均值的置信度为 0.95 的置信区间为 $[4.608, 5.392]$. (16 分)

四、证明题(本题 6 分)

15. 证明:因为 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$

所以, A 与 $\bar{B}$ 相互独立. (6 分)